HS Heilbronn Dr. Angerstein Studiengang VU	SS 2014	Physik 1, Teil 1, Übungen 2014-Schwerpunkt	B l a t t 1(3) Bachelor

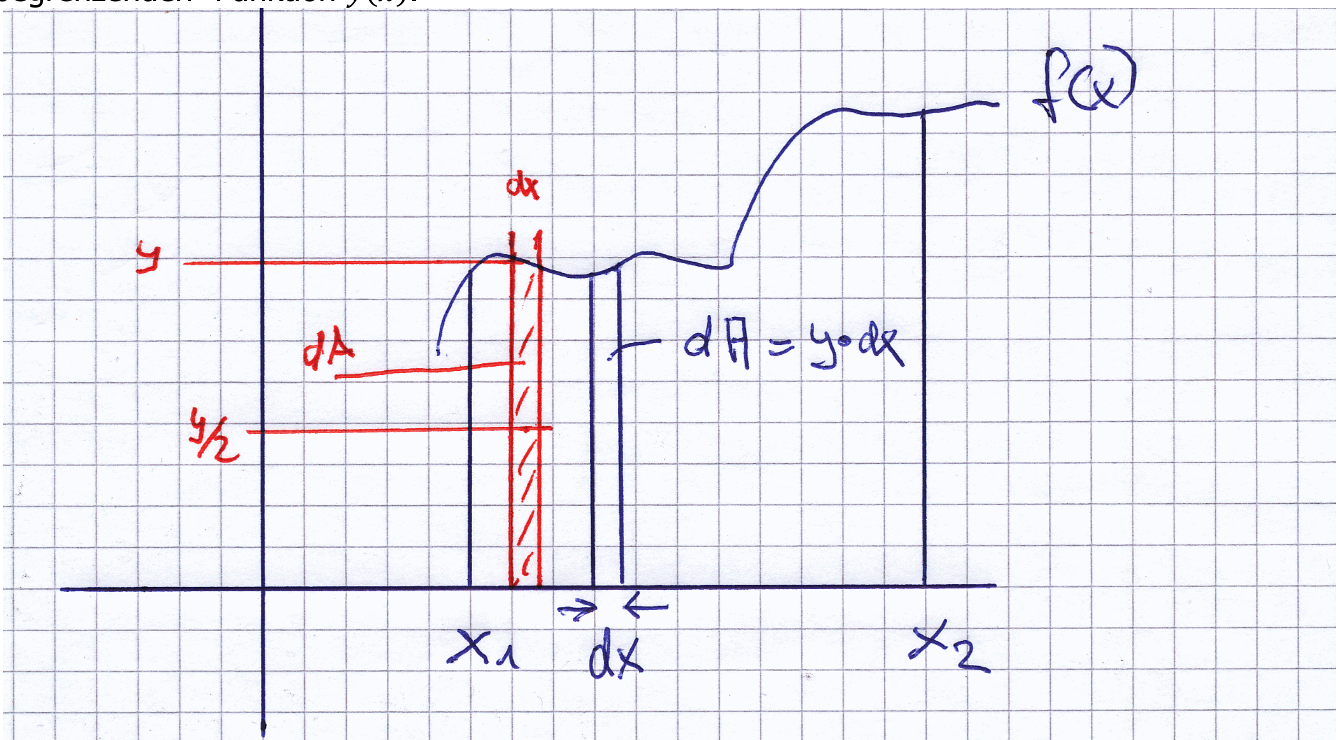
Schwerpunktbestimmung (Auszug aus der Vorlesung) add_on nach ca. Seite 94

Zur praktischen Bestimmung der Koordinaten des Schwerpunktes im 2-dimensionalen Fall

Dazu substituiert man im Fall der x-Koordinate (siehe blaue Beschriftung):

$$dA \text{ mit } y \cdot dx \,,$$

was einem infinitesimalen Flächenstreifen entspricht. Ferner entspricht hierbei y der -die Fläche begrenzenden- Funktion $y(x)$.



$$dA = \frac{y}{2} \cdot dx$$

$$x_S = \frac{1}{A} \int_A x \cdot dA = \frac{1}{A} \cdot \int x \cdot y \cdot dx$$

$$y_S = \frac{1}{A} \int_A y \cdot dA$$

$$= \frac{1}{A} \cdot \int y \cdot \frac{y}{2}\, dx$$

y-Koordinate

Für die praktische Berechnung der *y*-Koordinate im 2-dimensionalen Fall gibt es prinzipiell zwei Vorgehensweisen:

- entweder man bildet Umkehrfunktion $x(y)$ und berechnet das Integral

$$\int_A y \cdot dA = \int_y y \cdot x(y) \cdot dy,$$

wobei die „neuen" Integrationsgrenzen nun auf der y-Achse zu finden sind.
(Oft unangenehm zu rechnen)

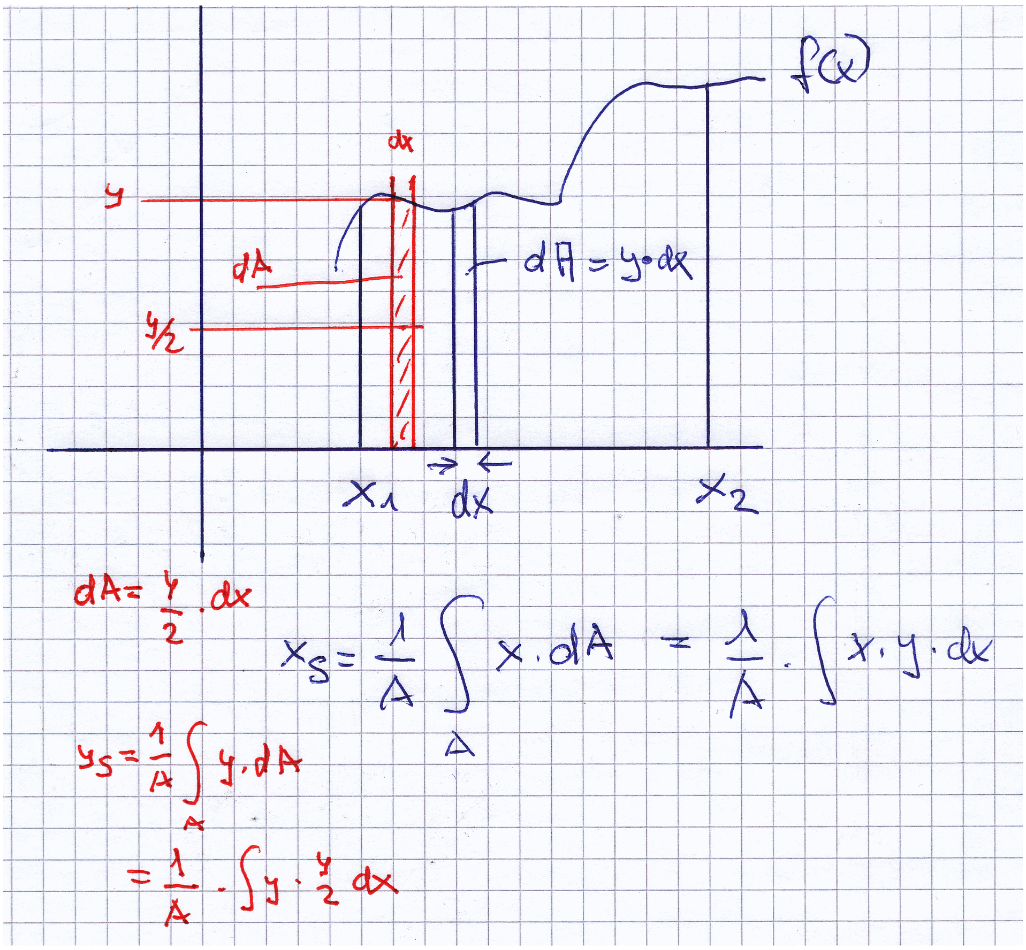
- oder man nutzt aus, dass der Schwerpunkt eines jeden zur y-Achse - parallelen infinitesimalen Flächenstreifen in der Mitte des dy – Balkens bei

$$\frac{y(x)}{2}$$

ist. Dann erhält man zur Bestimmung der y-Koordinate eine einfachere Formel, mit deren Hilfe das Bilden der Umkehrfunktion erspart bleibt:

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \int_A y \cdot dA = \frac{1}{A} \cdot \int_x y \cdot \frac{y}{2} \cdot dx$$

siehe rote Beschriftung der Zeichnung:



Beispiel: Schwerpunkt einer Parabel

Wir suchen den Flächenschwerpunkt jener Fläche, die durch eine Parabel $\boldsymbol{y = x^2 - 4}$ und durch die x-Achse definiert ist.

Zuerst bestimmen wir den Inhalt A der Fläche

$$A = \int_{-2}^{+2} \left(x^2 - 4\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-2}^{+2} = \left[\frac{8}{3} - 8\right] - \left[-\frac{8}{3} + 8\right]$$

$$A = \frac{16}{3} - 16 = -\frac{32}{3}$$

Die Grenzen des Integrals sind bei Begrenzung der Fläche durch die x-Achse die Nullstellen der Funktion.

Die x-Koordinate des Schwerpunktes ergibt sich zu

$$x_s = \frac{1}{A} \int_{-2}^{+2} x\left(x^2 - 4\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{+2} = 0$$

Die y-Koordinate ergibt sich zu

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \int_A y \cdot dA = \frac{1}{A} \cdot \int_x y \cdot \frac{y}{2} \cdot dx$$

mit $dA = \frac{y}{2} dx$

$$y_s = \frac{1}{A} \int_{-2}^{+2} y \frac{y}{2} dx = \frac{1}{2A} \int_{-2}^{+2} y^2 dx = \frac{1}{2A} \int_{-2}^{+2} \left(x^2 - 4\right)^2 dx = \frac{1}{2A} \int_{-2}^{+2} \left(x^4 - 8x^2 + 16\right) dx = -1.6$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \left[\frac{x^5}{5} - 8\frac{x^3}{3} + 16x\right]_{-2}^{+2} = -1.6$$