Übung 7

Gravitation – Schweredruck - Wasser. Diesmal 6 Aufgaben, davon 2 sehr leicht zu beantworten.

Aufgabe 1 – ISS (IRS)

Die ISS (IRS) hat eine Masse von 455 t und fliegt aktuell in einer mittleren Höhe von 416 km.

a. Welcher potenziellen Energie entsprechen diese Höhendaten entsprechend der korrekten Beziehung und der für die Erdoberfläche?
b. Wie lange müsste Neckarwestheim 2 mit einer Leistung von 1.2 GW dafür arbeiten?

Die ISS steht ja nicht still, sondern wird ja durch die Zentrifugalkraft in der Umlaufbahn gehalten. Die mittlere Umlaufzeit sind 93 min, die Bahngeschwindigkeit 28000 km/h.

c. Wie hoch ist die kinetische Energie der ISS unter diesen Bedingungen?
d. Wie lange müsste Neckarwestheim 2 mit einer Leistung von 1.2 GW dafür arbeiten?
e. Sind die obigen Angaben bezüglich Umlaufzeit und Bahngeschwindigkeit konsistent?

Hubarbeit: a.)

$$W_{ISS} = \gamma \cdot M_E \cdot m_{iss} \cdot \frac{h}{R_E \cdot (R_E + h)}$$
$$W_{ISS} = \gamma \cdot M_E \cdot m_{iss} \cdot \frac{h}{R_E \cdot (R_E + h)}$$

mit Erdmasse = 5,9722$\times 10^{24}$ kg, dem Erdradius R_0 = 6.371.000,785 m und der Gravitationskonstanten

$$\gamma = G \ = \ 6{,}674 \cdot 10^{-11} \ \mathrm{m}^3/\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2$$

$$W_{ISS} = 6{,}674 \times 10^{-11} \cdot 5{,}9722 \times 10^{24} \cdot \frac{416 \times 10^3 \ \mathrm{m}}{6.371.000{,}785 \ \mathrm{m} \ \cdot (6.371.000{,}785 \ \mathrm{m} \ + 416000 \ \mathrm{m})}$$

$$W_{ISS} = 3{,}986 \times 10^{14} \cdot 455000 \frac{416 \times 10^3}{6.371.000{,}785 \ \cdot (6.787000{,}785)} =$$

$$W_{ISS} = 3{,}986 \times 10^{14} \cdot \frac{416 \times 10^3}{4{,}323998733 \times 10^{13}} = 3{,}986 \times 10^{14} \cdot 9{,}621 \times 10^{-9} = 455000 \cdot 3.835 \times 10^6$$

$$W_{ISS} = 1{,}745 \times 10^{12} \ \mathrm{J}$$
$$W_{ISS\_g_E} = m \cdot g \cdot h = 455000 \cdot 9{,}80665 \cdot 416000 = 1{,}8562 \times 10^{12} \ \mathrm{J}$$

Normfallbeschleunigung, auf g_n = 9,80665 m/s^2 festgelegt
(dies sind 6,4 % zu viel, Vorsicht, welchen Wert für g nimmt man?)

b.

Neckar II: $1{,}2 \times 10^9$ W

$$t = \frac{W_{ISS}}{P_{II}} = \frac{1{,}745 \times 10^{12}}{1{,}2 \times 10^9} = 1454 \ \mathrm{s} = 24{,}24 \ \mathrm{min}$$

c.

$$W_{ISSkin} = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{455000 \cdot \left(\frac{28000}{3{,}6}\right)^2}{2} = \ 1{,}38 \times 10^{13} \ \mathrm{J}$$

d.

$$t = \frac{W_{ISSkin}}{P_{II}} = \frac{1{,}38 \times 10^{13}}{1{,}2 \times 10^9} = 11468 \ \mathrm{s} = 191 \ \mathrm{min} = 3{,}2 \ \mathrm{h}$$

e.)

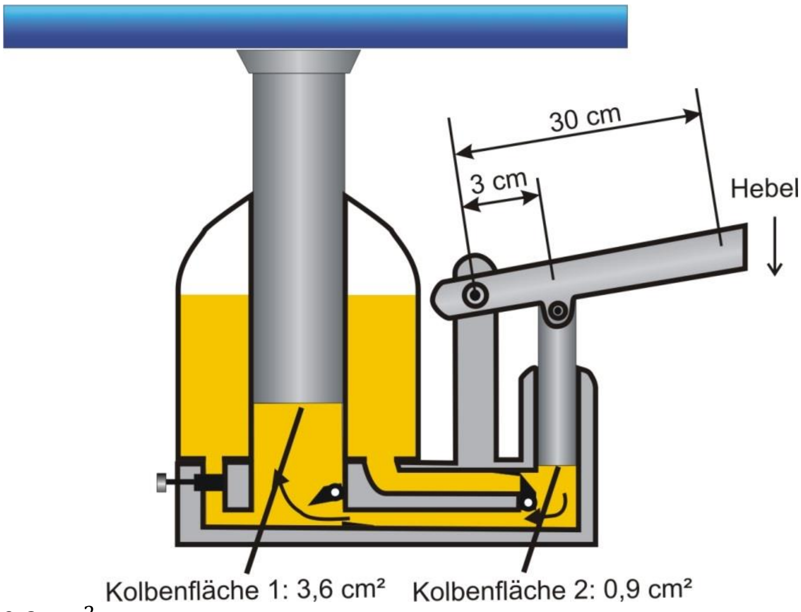
$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2 \cdot \pi}{93 \cdot 60}$$

$$v = r\,\omega = 6.787000 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{93 \cdot 60} \cdot = 7642\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 27512\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

was ungefähr 28000 km/h sind.

Aufgabe 2 – Wagenheber

a) Wie groß muss die Kraft sei, die auf den kleinen Kolben wirkt, damit eine Masse von 500 kg angehoben wird.
b) Wie groß ist dann die Kraft, die am Ende des Hebel wirken muss?



geg.: $m = 500\ \mathrm{kg}, F_1 = 5000\ \mathrm{N}, A_1 = 3{,}6\ \mathrm{cm}^2, A_2 = 0{,}9\ \mathrm{cm}^2$

gesucht: F_2, F_3

Lösung:

a) Es gilt das Gesetz für die hydraulische Anlage, der Druck ist überall im abgeschlossenen System gleich:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

nach der gesuchten Größe aufgelöst:

$$F_2 = \frac{F_1}{A_1} \cdot A_2$$

und eingesetzt und ausgerechnet:

$$F_2 = \frac{5000}{3{,}6} \cdot 0{,}9$$

Hier sind die Flächenverhältnisse als $\frac{cm^2}{cm^2} = \frac{m^2}{m^2}$ eingesetzt. Man muss hier nicht auf die Basiseinheit m umrechnen.

$$F_2 = 1250\ \mathrm{N}$$

b) Der Hebel ist einseitig und die beiden Längen der Hebelarme stehen im Verhältnis 1:10. Damit wird durch den Hebel die Kraft noch mal auf ein Zehntel verkleinert. Es muss also am Hebelende eine kraft von 125 N wirken. Das entspricht etwa einer Masse von 12,5 kg.

Antwort: Auf den Pumpkolben muss eine Kraft von 1250 N wirken. Am Hebelende beträgt die notwendige Kraft nur noch 125 N

Aufgabe 3 - Taucher

Ein Taucher benutzt zur Messung der Tauchtiefe ein Manometer. Dieses Messgerät zeigt einen Druck von $4{,}5*10^5$ Pa an. Wie tief ist der Taucher unter Wasser?

gegeben: $p = 450000\ \mathrm{Pa}$, gesucht: h

Der Druck im Wasser ist der Schwerdruck der Wassersäule, die über dem Taucher liegt.
Der Druck allgemein ist:

$$p = \frac{F}{A}$$

Die Kraft entsteht durch die Gewichtskraft der Wassersäule mit der Fläche A. Die Gewichtskraft ist

$$F = m \cdot g$$

Welche Masse hat die Wassersäule? Bekannt ist die Gleichung für die Masse aus Dichte und Volumen:

$$m = \rho \cdot V$$

Die Dichte von Wasser ist bekannt, aber welches Volumen hat die Wassersäule?

$$V = A \cdot h$$

Damit wird die Gewichtskraft der Wassersäule

$$F = A \cdot h \cdot \rho \cdot g$$

Nun ist noch die Fläche eine unbekannte Größe. Setzt man die Gewichtskraft aber in die Druckgleichung ein, kürzt sich die Fläche raus. Oder

$$p = \frac{F}{A} = h \cdot \rho \cdot g$$

Der Schwerdruck ist nur noch von der Tiefe, der Dichte der Flüssigkeit und der Fallbeschleunigung abhängig.

$$h = \frac{p}{\rho \cdot g}$$

$$h = \frac{450000\ \mathrm{Pa}}{1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \frac{450000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}}{1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 45{,}9\ \mathrm{m}$$

Antwort: Die Tauchtiefe beträgt 45,9 m.

Aufgabe 4 – Saugpumpe Grenze

Erkläre, warum man mit einer einfachen Saugpumpe Wasser nicht höher als 10 m pumpen kann.

Antwort: Saugpumpe saugt Wasser an, weil Luft auf das Wasser drückt. Luftdruck = etwa 10 m Wassersäule, bei 10 m ist Druck in der Pumpe so groß wie der Luftdruck. In der Realität wird der Wert von 10 m nicht erreicht, weil das Wasser gelöste Luft enthält, die dann entweicht. Da muss man dann heftig pumpen. Man sollte nicht versuchen, über mehr als 5 m zu saugen.

Aufgabe 5 – Erdatmosphäre

Luft hat auf Meereshöhe eine Dichte von 1,29 g/dm³ und eine Druck von 1 bar. Wie hoch müsste die Erdatmosphäre sein, um diesen Druck zu erzeugen und die Dichte der Luft nach oben nicht abnehmen würde?

$$\rho_{Luft} = 1{,}29\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{dm}^3}$$

$$p = 1\ \mathrm{bar}$$

Gesucht: h

Der Druck am Erdboden entsteht durch den Schweredruck der Luft:

$$p = \rho \cdot g \cdot h$$

also

$$h = \frac{p}{\rho \cdot g}$$

Achtung: Wir rechnen in SI – Einheiten:

$$\rho_{Luft} = 1{,}29\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{dm}^3} = 1{,}29\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

$$p = 1\,\mathrm{bar} = 10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}^2} = 100000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 100000\,\mathrm{Pa}$$

Diese Werte verwenden wir jetzt

$$h = \frac{p}{\rho \cdot g} = \frac{100000}{1{,}29 \cdot 9{,}81} = 7900\,\mathrm{m} = 7{,}9\,\mathrm{km}$$

Antwort:

Hätte die Luft in jeder Höhe die gleiche Dichte, wäre die Atmosphäre nur 7,9 km hoch. Das heißt, die höchsten Berge der Erde würden bereits außerhalb der Luftschicht liegen.

Da die Dichte der Luft nach oben aber schnell kleiner wird, ist die Luftschicht wesentlich höher. Eine genaue Grenze lässt sich nicht angeben. Selbst in 200 km Höhe lassen sich noch Teilchen der Luft nachweisen und bremsen ganz schwach den Flug der Raumschiffe.

Aufgabe 6 – Wägung – Physikalisches Verständnis?

Ein leerer Luftballon wird auf eine empfindliche Waage gelegt, die 2 g anzeigt. Danach wird der Ballon mit einer Luftpumpe prall aufgepumpt, mit seinem eigenen Einfüllstutzen zugeknotet und wieder auf die Waage gelegt. Was zeigt sie jetzt an? Warum?

a) Sie zeigt weniger an.

b) Sie zeigt wieder 2 g an.

c) Sie zeigt mehr an.

c) Sie zeigt etwas mehr an.

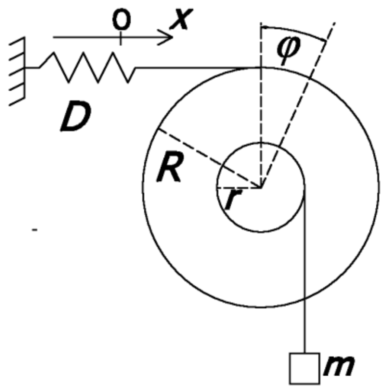
Es wirken zwei zusätzliche Kräfte auf den Ballon: Die Auftriebskraft durch das größere Volumen und die zusätzliche Gewichtskraft durch die Luft im Ballon.

Die Auftriebskraft ist so groß wie das Gewicht der Luft, dass der Ballon verdrängt. Die Gewichtskraft entspricht dem Gewicht der Luft im Ballon. Beide haben das gleiche Volumen, aber die Luft im Ballon ist auf Grund des größeren Druckes dichter zusammen und damit schwerer als der Auftrieb,

Option: Wie groß ist der angezeigte Zahlenwert, wenn der Überdruck im Luftballon 0,2 bar ist und das Volumen des Ballons 2 Liter (Aufgabe zu der Thermodynamik von Prof. Freudenberger).

Übungsaufgabe aus der Vorlesung vom 1.12.2014

Gegeben sei eine reibungsfrei auf einer Achse rotierende Doppelrolle mit Trägheitsmoment J_0. Eine Feder der Konstante D ist mit einem Ende über eine Schnur mit dem äußeren Teil der Rolle verbunden, ihr anderes Ende ist an einer Wand fixiert.
Die Masse m hängt an einer gewichtslosen Schnur, die sich von der seitlich angebrachten kleineren, mit der **großen Scheibe fest verbundenen** Rolle abwickeln kann.
Daten: m = 1kg, D = 100 N/m, r = 8 cm, R = 12 cm. Die beiden Scheiben der Doppelrolle bestehen aus Aluminium (⍰ = 2700 kg/m^3) und haben beide eine Dicke von jeweils d = 2 cm.



a) Die Masse m werde angehängt, das System dreht sich langsam in den Gleichgewichtszustand. Berechnen Sie die Gleichgewichtslage ⍰$_0$!
b) Stellen Sie die Momenten-Gleichung auf, leiten Sie daraus die Schwingungs-Differentialgleichung ab und bestimmen Sie die Frequenz ⍰!
Hilfe:

a) Gleichgewichtslage ergibt sich aus dem Drehmoment-Gleichgewicht: Masse mit „Hebelarm“ r, Feder mit „Hebelarm“ R. Winkel in rad umrechnen!
b) Wie bei einer früheren Aufgabe kann die Masse m in das Gesamt-Trägheitsmoment einbezogen werden!
c) $\sum$ (Trägheitsmomente) $\cdot \ddot{\varphi}$ = $\sum$ (Drehmomente). Dies führt auf eine inhomogene DGL.

Lösung

a) Momentengleichgewicht:

$$M_{Feder} = D \cdot x \cdot R = D \cdot R \cdot \varphi_0 \cdot R = D \cdot R^2 \cdot \varphi_0$$
$$M_{Masse} = m \cdot g \cdot r$$

$M_{Feder} = M_{Masse} \rightarrow D \cdot R^2 \cdot \varphi_0 = m \cdot g \cdot r$ oder $\varphi_0 = \frac{m \cdot g \cdot r}{D \cdot R^2} = 31{,}2°$

b) Mit J_0 = Trägheitsmoment der Doppelrolle gilt:

$$J_0 \cdot \alpha + m \cdot r^2 \cdot \alpha = m \cdot g \cdot r - D \cdot R^2 \cdot \varphi$$

Wegen $\alpha = \ddot{\varphi}$ folgt daraus:

$$(J_0 + m \cdot r^2) \cdot \ddot{\varphi} = -D \cdot R^2 \cdot \varphi + m \cdot g \cdot r$$
$$\ddot{\varphi} = -\frac{D \cdot R^2 \cdot}{J_0 + m \cdot r^2} \varphi + \frac{m \cdot g \cdot r}{J_0 + m \cdot r^2}$$

Dies ist von der Form der DGL der einfachen Schwingung aus der Vorlesung, nur in φ statt in y. Die Kreisfrequenz kann man schon anschreiben: $\omega^2 = \frac{D \cdot R^2 \cdot}{J_0 + m \cdot r^2}$

Jetzt fehlt noch die Berechnung von J_0:

Sei M_G die Masse der großen Scheibe, M_k die Masse der damit verbundenen kleinen Scheibe, so gilt:

$$J_0 = \frac{1}{2} \cdot M_k \cdot r^2 + \frac{1}{2} \cdot M_G \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi \cdot d \cdot (r^4 + R^4) = 0{,}02106\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$$

$$J_0 + m \cdot r^2 = 0{,}02106\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 + 1\ \mathrm{kg} \cdot (0{,}08\ \mathrm{m})^2 = 0{,}02746\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$$

Also

$$\omega^2 = \frac{D \cdot R^2 \cdot}{J_0 + m \cdot r^2} = \frac{100 \cdot 0{,}12^2 \cdot}{0{,}02746} = 52{,}44\ s^{-2}$$

$$\omega = 7{,}24\ s^{-1} \text{ und } f = 1{,}15\ s^{-1}$$