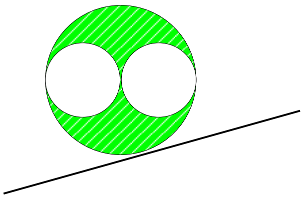
Dieser Übung befasst sich überwiegend mit Drehmoment, Trägheitsmoment

Aufgabe 1 Massenträgheitsmoment

a) Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment J eines Zylinders (Radius r) der zwei Bohrungen mit dem Radius $r/2$ hat (Masse des <u>verbliebenen Teils</u> sei m, Formel: J als Funktion von r, m)

b) Welche Geschwindigkeit hat der Zylinder, wenn er eine schiefe Ebene der Höhe 0,1m herabgerollt ist?



a) Sei m_{ol} die Masse der großen Scheibe **<u>ohne Löcher</u>** und m_1 die Masse einer Scheibe von Lochgröße, d sei die Dicke der Scheibe, ρ ihre Dichte. Dann ist das Trägheitsmoment der Scheibe ohne Löcher $J_{ol} = ½\, m_{ol}\, r^2$.

Trägheitsmoment eines Lochs, das entfernt ist, bezüglich eigener Achse: $J_l = ½\, m_1\, r^2$

Bezogen auf die Rotationsachse des Gesamtkörpers: $J_{la} = ½\, m_1\, r^2 + m_1\, r^2$ nach Anwendung des Steinerschen Satzes

$J = J_{ol} - 2 * J_{la}$

$J = ½\, m_{ol}\, r^2 - 2 \cdot (½ \cdot m_1 r^2 + m_1 r^2) = ½\, m_{ol}\, r^2 - 3\, m_1 r^2 = ½\, m_{ol}\, r^2 - 3\, m_1\, r^2/4.$

$m_{ol} = \pi\rho d r^2$ und $m_1 = \pi\rho d r^2 = \pi\rho d r^2/4.$

$J = \pi\rho d(1/2\, r^4 - 3/16\, r^4) = 5/16\, \pi\rho d r^4 = 5/16\, m_{ol}\, r^2$ (1)

Die Masse des Reststücks nach Ausschneiden der 2 Kreisscheiben ist:

$m_r = \pi\rho d(r^2 - 2\cdot r^2/4) = ½\, \pi\rho d r^2 = ½\, m_{ol}.$

Also ist wegen (1): $J = 5/8 \cdot (1/2\, \pi\rho d r^2) \cdot r^2 = 5/8\, m_r\, r^2$

b) $W_{kin} = ½\, m_r\, v^2 + ½\, J\, \omega^2 = m_r\, g\, h$

Mit $J = 5/8\, m_r\, r^2$ und $\omega = v/r$ folgt:

$½\, m_r\, v^2 + 5/16\, m_r v^2 = m_r\, g\, h$

$v^2 = 16/13$ g h und $v = 1{,}1$ m/s.

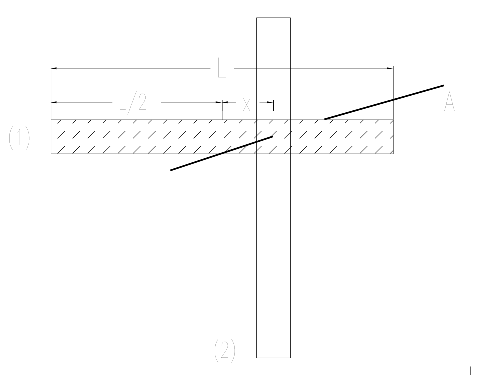
Aufgabe 2 – Dünner Stab – Drehbewegung aus der Ruhelage

Ein <u>dünner</u> Stab der Länge l ist um die Achse A drehbar gelagert. Diese Achse verläuft senkrecht zum Stab und ist um die Strecke x von der Stabmitte entfernt. Der Stab werde zunächst horizontal in Position (1) festgehalten und dann losgelassen.

a) Berechnen Sie das resultierende Drehmoment M!

b) Mit welcher Winkelbeschleunigung α beginnt er sich aus Position (1) zu drehen?

c) Mit welcher Winkelgeschwindigkeit ω geht er durch die Senkrechte (2)?



Lösung:

a) Sei m die Masse des gesamten Stabes.
Dann ist das links von der Achse wirkende Drehmoment:

$$\vec{M}_{links} = \frac{l/2 + x}{l} \cdot m\,g \cdot \frac{l/2 + x}{2}$$

$$und\ \ rechts$$

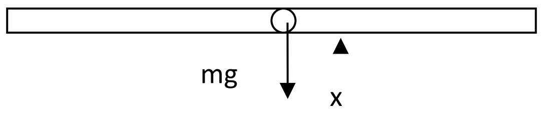
$$\vec{M}_{rechts} = \frac{l/2 - x}{l} \cdot m\,g \cdot \frac{l/2 - x}{2}$$

Das resultierende Moment ist $M_{res} = M_{links} - M_{rechts}$

$$\vec{M}_{res} = \frac{l+2x}{2l}\,m\,g \cdot \frac{l+2x}{4} - \frac{l-2x}{2l}\,m\,g \cdot \frac{l\,2x}{4}$$

$$= \ldots.$$

$$\vec{M}_{res} = \frac{mg}{8l} \cdot 8lx = mgx$$



Auf dieses Ergebnis kommt man auch durch Nachdenken allein: Wenn die Masse im Schwerpunkt gedacht wird, ergibt sich das Drehmoment zu m g x.

b) Mit Steiner's Hilfe ergibt sich für das Gesamt-Trägheitsmoment:

$$J_{ges} = \frac{1}{12} m\,l^2 + m\,x^2 = m\left(\frac{l^2}{12} + x^2\right).$$

Wegen $M = J\,\alpha$ folgt schließlich: $\alpha = \frac{M}{J} = \frac{m\,g\,x}{\frac{m}{12}\left(l^2 + 12\,x^2\right)} = \frac{12\,g\,x}{l^2 + 12\,x^2}$

c) $\Delta W_{pot} = m\,g\,x = ½\ J_{ges}\ \omega^2$

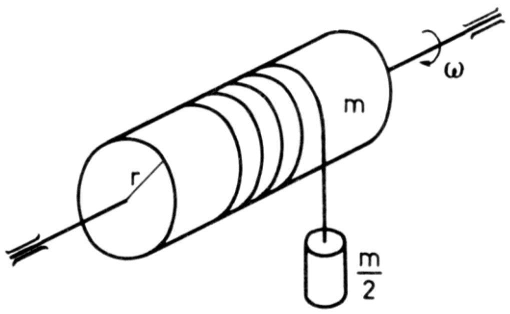
$$\omega^2 = \frac{2\,m\,g\,x}{m\left(\frac{l^2}{12}+x^2\right)} = \frac{24gx}{l^2+12x^2} \quad und\ \omega = \sqrt{\frac{24gx}{l^2+12x^2}}$$

Sonderfälle: $x = 0 \rightarrow \omega = 0$, $x = l/2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$ $\quad und\ v = l\omega = \sqrt{3gl}$

Aufgabe 3 – Trommel

Auf eine Trommel vom Radius r und der Masse m ist ein Seil (gewichtslos) gewickelt, an dem die Masse m/2 hängt.

Berechne die Winkelgeschwindigkeit ω der Trommel als Funktion der Zeit. Wie groß muss der Radius der Trommel sein, wenn in einer Minute die Drehzahl ν = 94 s-1 erreicht werden soll?



$$v = r*\omega$$

$$h = r\int \omega dt \text{ mit } \omega = \alpha t$$

$$J = \frac{m*r^2}{2}$$

Energiesatz:

$$\frac{J*\omega^2}{2}+\frac{m}{4}*(r\omega)^2 = \frac{m}{2}*g*r\int\omega dt = \frac{m}{2}*g*r*\alpha*\frac{t^2}{2} = \frac{m}{4}*g*r*(\alpha*t)*t$$

$$\frac{J*\omega^2}{2}+\frac{m}{4}*(r\omega)^2 = \frac{m}{4}*g*r*\omega*t$$

$$\left(\frac{J}{2}+\frac{m}{4}*r^2\right)*\omega = \frac{1}{4}m*g*r*t$$

$$(2J+m*r^2)*\omega = m*g*r*t$$

$$\omega = \frac{m*g*r*t}{2J+m*r^2}$$

$$\omega = \frac{m*g*r*t}{2\frac{m*r^2}{2}+m*r^2} = \frac{m*g*r*t}{2*m*r^2} = \frac{g*t}{2*r}$$

$$\omega = \frac{g*t}{2*r}$$

$$r = \frac{g*t}{2*\omega}$$

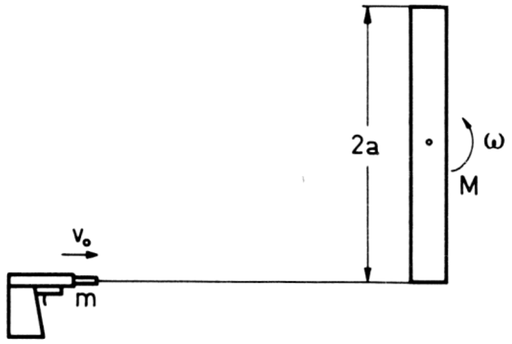
$$r = \frac{9.81*60}{2*2*\pi*94} = 0.5\text{ m}$$

Aufgabe 4 – Pistolenschuss

Diese Aufgabe behandelt die Impulserhaltung

Welche Winkelgeschwindigkeit erhält der um eine horizontale Achse drehbare dünne Stab, wenn die Pistolenkugel im Stabende stecken bleibt?

2 a = 0,5 m; v_o = 200 m/s; m = 10 g; M = 1,5 kg.



Drall = Drehimpuls

lt Tabelle ist das Trägheitsmoment eines Stabes bezogen auf den Schwerpunkt $J = (1/12)\, M\, L^2$

mit L=2a

$J=M*4a^2/12 \equiv$ $\boldsymbol{J = M^* a^2/3}$

Drehimpuls = Drehimpuls des Geschosses = Drehimpuls des Stabs

$\boldsymbol{J^*\omega = mv_0{}^*a = \omega^*(M^* a^2/3 + m^*a^2)}$

$$\omega = \frac{3*m*v_0}{M*a+3*m*a} = \frac{3\cdot 0,01\cdot 200}{(1,5+0,01\cdot 3)\cdot 0,25} = 15,6\ \mathrm{s}^{-1}$$

oder mit $\omega = 2\pi f$:

$$\text{Umlauffrequenz: } f = \frac{15,6}{2\pi} = 2,5\ \mathrm{s}^{-1}$$